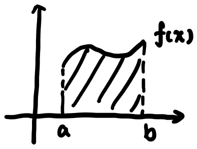
7.1 概念和可积性条件

2023年12月12日 星期二 10:01

一、定积分概念的导出背景

1. 曲边梯形的面积



在区间[a,b]内任取 n-1个分点，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

T: $\underbrace{[a,b]=\sum_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i]}$，称为[a,b]的一个划分．$T=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$ ($\Delta i=[x_{i-1},x_i]$，又 $\Delta i=x_i-x_{i-1}$)

近似：(估计 $S(E_i)$)，E_i为$[x_{i-1},x_i]$所对应的 曲边梯形

$$S(E_i)\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \quad (\xi_i\in[x_{i-1},x_i])$$

当 Δi 很小时，$S(E)=\sum_{i=1}^{n}S(E_i)\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta i$

$$\|T\|\triangleq\max_{1\le i\le n}\Delta i$$

$\downarrow \|T\|\to 0$ $\quad S(E)\triangleq\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta i$，$\xi_i\in\Delta i$

$\left.\begin{array}{l}\{\xi_i\}\text{为}\Delta i\text{的左端点，}S^{①}(E)=\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta i\\ \{\eta_i\}\text{为}\Delta i\text{的右端点，}S^{②}(E)=\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta i\end{array}\right\}$ 两者相等

划分：$T=\{x_0,\cdots x_n\}$，$[a,b]=\sum_{i=1}^{n}\Delta i$

近似：$S(E_i)\approx f(\xi_i)\Delta i \Rightarrow S(E)=\sum_{i=1}^{n}S(E_i)\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta i$

极限：$\|T\|\to 0$

2. 功

二、定积分的定义

定义1.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a,b\in\mathbb{R})$

划分：$T=\sum_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i]=\sum_{i=1}^{n}\Delta i$，$T=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$

$$\|T\|=\max_{1\le i\le n}\Delta i$$

任取 $\xi_i\in\Delta i$ $(1\le i\le n)$

$S_{T,\{\xi\}}(f)\triangleq\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta i$ 称为f在[a,b]上的一个黎曼和

↑依赖于

ξi是任取的

定义3：$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$J\in\mathbb{R}$

若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对[a,b]的任何划分T以及$\xi_i\in\Delta i$，只要$\|T\|<\delta$，

就有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta i-J\right|<\varepsilon$ $\left(|S_{T,\{\xi\}}(f)-J|<\varepsilon\right)$

则称f在[a,b]上黎曼可积，J为f在$\underset{\text{积分区间}}{[a,b]}$上的黎曼积分，记作

$$J=\int_{a\,(\text{下限})}^{b\,(\text{上限})}f(x)\,dx$$

注：① 数列极限 $\downarrow$ $n\to+\infty$；函数极限 $\downarrow$ $x\to x_0$, $x\to x_0\pm$, $x\to\pm\infty$；定积分定义 $\downarrow$ $\|T\|\to 0$

Moore-Smith 实数网极限

② 定积分由 f, $[a,b]$ 决定（f：被积函数，$[a,b]$：积分区间） $J=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(\xi)\,d(\xi)$

③ 可积性是函数的一个分析性质：将证明：$f\in C[a,b]$（f在$[a,b]$上连续）

$\Rightarrow$ f在$[a,b]$上 Riemann 可积

$\to f\in R[a,b]$

例1：Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$ 在$[0,1]$上的可积性

解：$\forall T$：$[a,b]=\sum_{i=1}^n\Delta_i$，$\exists\xi_i\in\mathbb{Q}\cap\Delta_i$，$\eta_i\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\Delta_i$

此时 $S_{T,\{\xi\}}(f)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i=1$ $S_{T,\{\eta\}}(f)=0$

$\Rightarrow D\notin R[0,1]$

三、可积条件

1. 必要条件：

定理：$f\in R[a,b]\Rightarrow f$在$[a,b]$上有界

反证法：若f在$[a,b]$上无界

$\Rightarrow\forall M>0$，$\forall T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，$\exists\xi_i\in\Delta_i$，使 $|S_{T,\{\xi\}}(f)|\geq M$，与$f\in R[a,b]$矛盾

肯定有个区间是无界的

注：① $R[a,b]\subsetneq[a,b]$上有界函数 $\to$ 有界函数不一定为黎曼函数

（如 Dirichlet 函数，故为真包含）

② $f:[a,b]\to\mathbb{R}$上的有界函数

2. 充要条件：

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，有界函数

$\forall T$：$[a,b]=\sum_{i=1}^n\Delta_i$，$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$

$\mathbb{R}'\to M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)\in\mathbb{R}'$

记 Darboux 和：

$U(T,f)\triangleq\sum_{i=1}^n M_i\Delta_i$ —— f关于T的 Darboux 上和

$L(T,f)\triangleq\sum_{i=1}^n m_i\Delta_i$ —— f关于T的 Darboux 下和

① 当T固定时

$$L(T)\leq S_{T\{\xi\}}(f)\leq U(T)$$

同时 $L(T)=\inf\limits_{\xi_i\in\Delta_i} S_{T,\{\xi\}}(f)$

$U(T)=\sup\limits_{\xi_i\in\Delta_i} S_{T,\{\xi\}}(f)$

② $M\triangleq\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $m\triangleq\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$m(b-a)\le L(T)\le U(T)\le M(b-a)$

$S^*=\inf\{U(T):T$为$[a,b]$的划分$\}$，(R中的非空有界集) 称为 f 在 $[a,b]$ 上的上积分

$S_*=\sup\{L(T):T$为$[a,b]$的划分$\}$，(R中的非空有界集) 称为 f 在 $[a,b]$ 上的下积分

问：① $S^*\ge S_*$

② $f\in R[a,b]\Leftrightarrow S^*=S_*$

性质1：若 T' 是 T 中增加有限个分点得到的分割 (加密)

$L(T')\ge L(T)$ $U(T')\le U(T)$

$\Rightarrow$ 上和不增，下和不减

定义：T_1,T_2，$T_1\cup T_2$ 是 T_1,T_2 的加细

性质2：$\forall T_1,T_2$ $L(T_1)\le U(T_2)$

$\downarrow$

$L(T_1)\le L(T_1\cup T_2)\le U(T_1\cup T_2)\le U(T_2)$

性质3：$S_*\le S^*$

性质4：T' 是 T 中增加 p 个新分点得到的划分，则有

$L(T)\le L(T')\le L(T)+(M-m)p\|T\|$

$U(T)-(M-m)p\|T\|\le U(T')\le U(T)$

对加细后的 Darboux 上.下和有一个上.下范围的估计，

$U(T)$ 的下确界

Darboux 积分定理.

$\lim\limits_{\|T\|\to0} U(T)=S^*$ $\lim\limits_{\|T\|\to0} L(T)=S_*$

欲证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\|T\|<\delta$ 时，$|U(T)-S^*|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists T_0$，$S^*\le U(T_0)<S^*+\varepsilon/2\Rightarrow S^*\le U(T\cup T_0)\le S^*+\varepsilon/2\ (\forall T)$

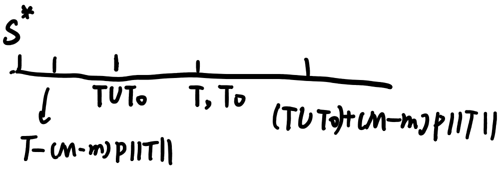
分析：找 δ，满足 $\|T\|<\delta$，$S^*\le U(T)<S^*+2\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$，设 $T_0=\{x_1',x_2',\cdots,x_p'\}$ p个分点

$T\cup T_0$：T上插了 p个分点，$S^*\le U(T_0)<S^*+\varepsilon/2\xRightarrow{\text{性质1}} S^*\le U(T\cup T_0)\le S^*+\varepsilon/2$

$\Downarrow$ 性质4

$U(T) \ge U(T\cup T_0) \ge U(T) - (M-m)p\|T\|$



$\Downarrow$

$U(T) \le U(T\cup T_0) + (M-m)p\|T\|$

$U(T) \le S^* + \varepsilon/2 + (M-m)p\|T\|$

$\le S^* + \varepsilon$ （令 $\|T\| \le \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$ 即可）

注：① $\lim\limits_{\|T\|\to 0} U(T) = S^* \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\delta>0, \|T\|<\delta$ 时，$|U(T)-S^*|<\varepsilon$

② $f:[a,b]\to\mathbb{R} \Rightarrow S^*, S_* \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{Darbox them}} S^* = \lim\limits_{n\to+\infty} U(T_n)$

定理2（可积的第一充要条件）$f:[a,b]\to R$ 有界，则

$f\in R[a,b] \Leftrightarrow S^* = S_*$

证："$\Leftarrow$" $\forall T$ fixed. $L(T)\le S_{T,\{\xi\}}(f) \le U(T)$，由"逼敛性"可知　ξ可任取

"$\Rightarrow$" $\exists J\in R, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使 $\|T\|<\delta$ 时，$\forall \xi_i\in\Delta_i$

$$J-\varepsilon \le S_{T,\{\xi\}}(f) \le J+\varepsilon \quad (\forall \xi_i\in\Delta_i)$$

例：$R(x)=\begin{cases} 0, & x\in R\setminus Q \\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q} \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 在[0,1]上? $R(x)\in\mathcal{R}[0,1]$?

$S_*=0$

取 T_n 为[0,1]的n等分，$n\to+\infty$

k fixed $\frac{1}{k}$，$n>k\ge 1$　$R(x)\ge\frac{1}{k}$ 的点至多有几个（$\frac{k(k+1)}{2}$个）

函数值 $1, \frac12, \frac13, \cdots \frac1k$　共 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个

$$\underbrace{U(T_n)}_{n等分} = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{1}{n} = \sum_{i:M_i\ge\frac1k} M_i\cdot\frac{1}{n} + \sum_{i:M_i<\frac1k} M_i\frac{1}{n}$$

$\downarrow n\to+\infty$　　$\le \frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\cdot 1$

$S^* \le \frac{1}{k}$　$\swarrow n\to+\infty$

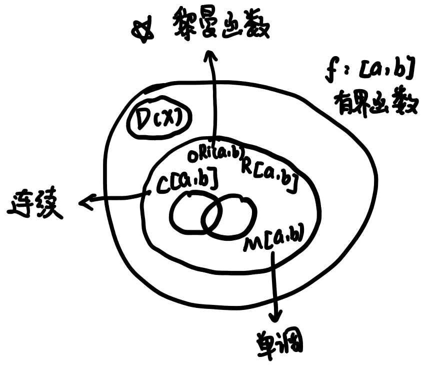
$\Rightarrow S^*=0$

定理3：（可积的第二充要条件：可积准则）

$f\in R[a,b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists T$，使 $U(T)-S(T)<\varepsilon$

记 $W_i = M_i - m_i$ 为 f 在 Δ_i 上的振幅，有时也记为 $W_i^f = M_i - m_i$

定理3'：有界函数 $f\in R[a,b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists T$ 使 $\sum_{i=1}^{n} W_i\Delta_i < \varepsilon$



三. 可积函数类

连续必可积

定理4: $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta)=0$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_0>0, \delta<\delta_0$ 时 $\sup\limits_{\substack{|x-y|<\delta\\ x,y\in[a,b]}} |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta_i \leq \varepsilon(b-a)$

一致连续: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 一致连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta)=0$

$f\in C[a,b] \Rightarrow \sup\limits_{\substack{|x-y|<\delta\\ x,y\in[a,b]}} |f(x)-f(y)| \triangleq \omega_f(\delta)$

定理5: f 在 $[a,b]$ 上单调 $\Rightarrow f\in R[a,b]$

不妨设 $f\uparrow$

$\forall\varepsilon>0$, ? $\exists T$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\Delta_i<\varepsilon$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta_i$

$\leq \sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\|T\|$

$=(f(b)-f(a))\|T\|<\varepsilon$

选择 T 满足: $\|T\|\leq \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$

定理6: 闭区间上只有有限个不连续点的有界函数必然可积

总结:

(1) 作分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$

(2) 求近似和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(3) 求极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$U(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad L(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

上积分 $S^*=\inf\{U(T): T$ 是 $[a,b]$ 的分割$\}$

下积分 $S_*=\sup\{L(T): T$ 是 $[a,b]$ 的分割$\}$

定理: f 在 $[a,b]$ 上可积

$\Leftrightarrow S^*=S_*$, 而且当 $S^*=S_*$ 时,

有 $\int_a^b f(x)dx=S^*=S_*$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 T, 使 $U(T)-L(T)<\varepsilon$

$\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$

记 $\omega_i=M_i-m_i$ — f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅

$\sum\limits^{n} \omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

7.2 定积分的性质

2023年12月19日 星期二　　10:15

性质1：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，$k\in\mathbb{R}$，则 kf 在 $[a,b]$ 上可积

且 $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

性质2：设函数 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，则 $f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积，

且 $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

由性质1与性质2可得定积分的线性性

性质3：设函数 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，则 $f\cdot g$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

※ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \overset{?}{=} \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

一般不成立！

分析：给定分割 $T=\{x_0, x_1, \cdots x_n\}$

$\forall 1\le i\le n$

$w_i^{f\cdot g} = \sup\{|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| : x', x'' \in \Delta x_i\}$

$\forall x', x'' \in \Delta i$

$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')|$

$\le |f(x')g(x') - f(x')g(x'')| + |f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')|$

$\le |f(x')|\, w_i^g + |g(x'')|\, w_i^f$

$\le M^*(w_i^g + w_i^f)$ （利用可积函数有界性）

于是 $\sum_{i=1}^n w_i^{f\cdot g}\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n M^*(w_i^f + w_i^g)\Delta x_i$

$= M^*\left(\sum_{i=1}^n w_i^f \Delta x_i + \sum_{i=1}^n w_i^g \Delta x_i\right)$

$\forall \varepsilon>0$，由 f 与 g 均可积，必存在分割 T，使

$\sum_{i=1}^n w_i^f \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M^*}$　　$\sum_{i=1}^n w_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M^*}$

从而 $\sum_{i=1}^n w_i^{f\cdot g}\Delta x_i < \varepsilon$

问：若 f 在 $[a,b]$ 上可积且恒不等于0

是否必有 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积　不一定

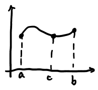
性质4：设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，$c\in(a,b)$

则 f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$

f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积，

而且当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，

有 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



该性质称为积分区间的可加性

分析："$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0$，由 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积，存在 $[a,b]$ 的分割 T_1，以及 $[c,b]$ 上的分割 T_2

使　$U(T_1)-L(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$

$U(T_2)-L(T_2)<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $T=T_1\cup T_2$，即 T 是 T_1 中的点与 T_2 中的点组成的集合

则 T 是 $[a,b]$ 的一个分割

且 $U(T)=U(T_1)+U(T_2)$　　$L(T)=L(T_1)+L(T_2)$

从而 $U(T)-L(T)<\varepsilon$

"$\Rightarrow$" $\forall\varepsilon>0$，由 f 在 $[a,b]$ 上可积，可知必存在 $[a,b]$ 上的一个分割 T，使 $U(T)-L(T)<\varepsilon$

令 $T^*=T\cup\{c\}$，即 T^* 是 T 的分点与 c 组成的集合

则 T^* 仍是 $[a,b]$ 的一个分割且

$U(T^*)-L(T^*)\le U(T)-L(T)\le\varepsilon$

令 $T_1=T^*\cap[a,c]$　　$T_2=T^*\cap[c,b]$

则 $U(T_1)-L(T_1)\le\varepsilon$

$U(T_2)-L(T_2)\le\varepsilon$

从而 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上与 $[c,b]$ 上均可积

任取 $[a,c]$ 上的分割 T_1，$[c,b]$ 上的分割 T_2

有　$U(T_1)+U(T_2)\ge\int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$　（上确界小于上界）

$L(T_1)+L(T_2)\le\int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

从而 $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

规定：(1) 当 $b=a$ 时 有 $\int_a^b f(x)\,dx=0$

(2) 当 $b<a$ 时，$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

☆ 性质5：设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\ge0$

则 $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

证：对 $[a,b]$ 上任一分割 T，以及 T 所对应的任一介点，均有

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta i\ge0$

从而 $\int_a^b f(x)\,dx) = \lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$

推论（保序性）　设函数 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，

且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

证：令 $F(x)=g(x)-f(x)$，$x\in[a,b]$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $F(x)\ge0$，$\forall x\in[a,b]$

由性质5，$\int_a^b F(x)\,dx\ge0 \Rightarrow$ 上式成立

性质6：设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上可积，

且 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

（注意到：$w_i^{|f|}\le w_i^f \Rightarrow$ 进而 $\int_a^b|f(x)|$ 可积）

由于 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$

保序性：$\int_a^b(-|f(x)|)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b|f(x)|\,dx$

从而成立！

※ 绝对值可积 $\longrightarrow$ 原函数不一定可积

原函数可积 $\longrightarrow$ 绝对值可积、

例：若函数 f 在 $[a,b]$ 非负且连续，且

$\int_a^b f(x)\,dx=0$，则 $f(x)\equiv0$，$x\in[a,b]$

☆ 积分第一中值定理

设函数 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，

则 $\exists\,\eta\in[m,M]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \eta\int_a^b g(x)\,dx$

其中 $m=\inf\{f(x): x\in[a,b]\}$

$M=\sup\{f(x): x\in[a,b]\}$

特别地，当 f 在 $[a,b]$ 上连续时，$\exists\,\xi\in[a,b]$，使

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$　(*)

☆ 令 $g(x)\equiv1$，上式等同于

$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

$\int_a^b f(x)\cdot1\,dx = f(\xi)\int_a^b 1\,dx$

$= f(\xi)(b-a)$

$\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

证：不妨设 $\forall x\in[a,b]$，有 $g(x)\ge0$，于是 $\forall x\in[a,b]$，有

$m\,g(x)\le f(x)g(x)\le M\,g(x)$

于是 $m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$　(Δ)

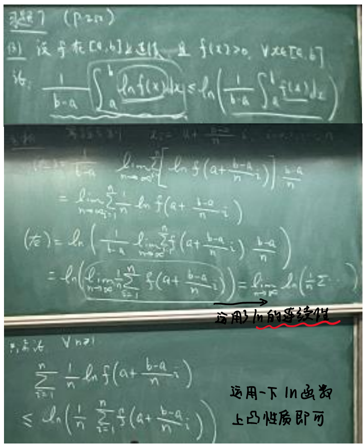
(1) 若 $\int_a^b g(x)\,dx=0$，则由上式 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$

从而任取 $\eta\in[m,M]$，都有 (*) 式成立

(2) 若 $\int_a^b g(x)\,dx\ne0$，则此时有 $\int_a^b g(x)\,dx>0$，从而由

(Δ) 式可得，$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\le M$　注意其不变号

令 $\eta=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$，则得 (*) 式成立



7.3 微积分基本定理

2023年12月21日 星期四 13:26

原函数存在定理：(连续函数存在原函数)

若 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$

注意 $f(x)$ 是连续函数才能应用该条件

设 f 是 $[a,b]$ 上的可积函数，则 $\forall x\in[a,b]$ 定义

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ —— f 的变上限积分 (Phi)

$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ —— f 的变下限积分 (Psi)

由于 $\Phi(x)+\Psi(x)=\int_a^b f(t)\,dt$

只需考虑 Φ 与 Ψ 其中之一即可

性质：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上连续。

证：任意固定 $x\in[a,b]$

任取 $\Delta x\neq 0$，使 $x+\Delta x\in[a,b]$

(欲证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)|=0$)

注意到：$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$

$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

由 f 在 $[a,b]$ 上可积，从而有界，因此 $\exists M>0$，使

$|f(x)|\le M$，$x\in[a,b]$

从而 当 $\Delta x>0$ 时，有

$|\Delta\Phi|\le\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\,dt\le M\Delta x=M|\Delta x|$

当 $\Delta x<0$ 时

$|\Delta\Phi|=\left|\int_{x+\Delta x}^x f(t)\,dt\right|\le\int_{x+\Delta x}^x|f(t)|\,dt\le M|\Delta x|$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=0$ 性质成立

下证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(x)$

注意到 f 在 $[a,b]$ 上连续，由积分第一中值定理

$\exists 0\le\theta\le 1$，使 $\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

$=f(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$

于是 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(x+\theta\cdot\Delta x)$

由 $f(x)$ 在 x 处连续 可得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\theta\cdot\Delta x)=f(x)$

定理：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，F 是 f 的原函数

则 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ — $\boxed{\text{N-L公式}}$

证：由 f 在 $[a,b]$ 上可积，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对于 $[a,b]$ 的任一分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$，

以及对应于该分割的任一介点组 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$，只要 $\|T\|<\delta$，

就有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$

现在取定 $[a,b]$ 的一个分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$，使 $\|T\|<\delta$.

注意到 $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n(F(x_i)-F(x_{i-1}))$

由定理条件，$F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$

从而 $\forall 1\le i\le n$，F 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上满足 L-中值定理的条件.

只需求开区间可导，闭区间连续

于是 $\exists\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使

$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i$

故 $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，$\forall i=1,2,\cdots,n$

从而由 δ 的定义，有

$|F(b)-F(a)-J|=\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$

由 ε 的任意性，有 $F(b)-F(a)=J=\int_a^b f(x)\,dx$

※ (1) F 的条件可减弱为，F 在 $[a,b]$ 上连续 且 $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$

亦可减弱为：除去有限个点外，有 $F'(x)=f(x)$

取定分割时把这些点包括进去就行

(2) N-L 可写作为

$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b$

若原函数不连续，也只需要将区间分割开即可。

例子！

定积分应用

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

由于 LHS $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

可以看作 $\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 2$

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right)$

$=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}$

例：计算 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$ 的导数

变上限积分的求导

令 $G(u)=\int_0^u\sin\sqrt{t}\,dt$，$u\ge 0$

有 $G'(u)=\sin\sqrt{u}$，$u\ge 0$

由 $F(x)=G(x^2)=G'(x^2)\cdot(x^2)'$

$=\sin\sqrt{x^2}\cdot 2x$

例：求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x^2}\cdot 2x}{3x^2}$

$=\frac{2}{3}$

定积分的换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导函数，令 m 和 M 分别是 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值与最大值，即 $[m,M]=\varphi([\alpha,\beta])$ φ 在 $[\alpha,\beta]$ 的值域

若函数 f 在 $[m,M]$ 上连续，则 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx$

证：由定理条件，$g(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，

由 f 在 $[m,M]$ 上连续，所以存在 $[m,M]$ 上的函数 F，使 $F'(x)=f(x)$，$x\in[m,M]$

直接找到原函数

于是 $\forall t\in[\alpha,\beta]$

$(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=g(t)$

由 N-L 公式

$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt\overset{N-L}{=}F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\overset{N-L}{=}F(x)\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}$

※ 注：在定理中，不要求 φ 是单射

例：计算 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

令 $x=\sin t$，当 t 从 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，

换为 $\frac{5\pi}{2}$，一个道理

x 从 0 变为 1，又 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $[0,1]$ 上连续

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(\sin t)'\,dt$

$=\frac{\pi}{4}$

例：计算 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

令 $x=\tan t$ 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2 t}\cdot\sec^2 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-t)}{\cos t}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(t)\,dt$

$=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{8}\ln 2$

例：计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$ $\therefore I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dt$

$\therefore I=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}\,dx$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\left|\sec(x-\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4})\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$

例：计算 $I=\int_0^2\underbrace{\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}}_{f(x)}$

错解：令 $F(x)=\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}$

则 $F'(x)=f(x)$

则 $I=f(x)\Big|_0^2=0$???

因为 $x=1$ 时 $f(x)$ 原函数不为 $F(x)$

$F(x)$ 在 1 处不连续

从而 $I=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $u'(x)$ 与 $v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

则 $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

例：设 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{x}{2}, & x\ge 0\\ x\arctan x, & x<0\end{cases}$

计算 $I=\int_0^{\pi+1}f(x-1)\,dx$

$=\int_{-1}^{\pi}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\,dx$

正常求即可

例：计算 $\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx}_{J_n}$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$，$n=1,2,\cdots$

$J_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d\cos x$

$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$

$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)$

$=(n-1)J_{n-2}-(n-1)\cdot J_n$

$\Rightarrow J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$ ($n\ge 2$ 的情况)

$J_0=\frac{\pi}{2}$ $J_1=1$

$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}J_1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$

$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}J_0=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$

显然 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x=J_n$

注意到 $\forall m\ge 1$，有

$J_{2m+1}\le J_{2m}\le J_{2m-1}$

$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}<\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$

$\underbrace{\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}}_{\text{记为}A_m}<\frac{\pi}{2}<\underbrace{\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m}}_{\text{记为}B_m}$

断言 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=\frac{\pi}{2}$ (Wallis 公式)

注意到 $0<B_m-A_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m(2m+1)}$

$<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2m}$

所以 $\lim\limits_{m\to\infty}(B_m-A_m)=0$

又 $0<\frac{\pi}{2}-A_m<B_m-A_m$

所以 (1) 式成立

泰勒公式的积分型余项

设 f 在 $O(x_0,\delta)$ 内有 $(n+1)$ 阶连续函数

则 $\forall x\in O^*(x_0,\delta)$，有：

$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)\,dt$

$=f(x_0)-\int_{x_0}^x f'(t)\,d(x-t)$

$=f(x_0)-(x-t)f'(t)\Big|_{t=x_0}^{x}+\int_{x_0}^x(x-t)f''(t)\,dt$

$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^x(x-t)f''(t)\,dt$

$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^x f''(t)\,d(x-t)^2$

$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}(x-t)^2f''(t)\Big|_{x_0}^x+\frac{1}{2}\int_{x_0}^x(x-t)^2f'''(t)\,dt$

$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^x(x-t)^2f'''(t)\,dt$

$\cdots$

$=T_n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

并由此可推 L-余项

$=T_n+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^x(x-t)^n\,dt$

$=T_n-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left((x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^x\right)$

$=T_n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$

定理 1：设函数 f 在 $[-a,a]$ 上可积

(1) 若 f 是偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

(2) 若 f 是奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$

定理 2：设 f 是以 T 为周期的函数，且 f 在 $[0,T]$ 上可积，

则 $\forall a\in\mathbb{R}$，有

$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$

另一个版本的换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数（φ' 连续），并且 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调

记 $[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$

则 对于 $[a,b]$ 上可积的函数 f，有 （不一定连续）

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx$

证：不妨设 φ 在 $[a,b]$ 上单增，记 $I=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx$

任取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割

$T=\{\alpha=t_0,t_1,\cdots t_n=\beta\}$

令 $x_i=\varphi(t_i)$，$0\le i\le n$

则 $T'=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个分割

并且 由 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，从而一致连续，可知

当 $\|T\|\to 0$ 时，$\|T'\|\to 0$

$\forall 1\le i\le n$，任取 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$，欲证：

当 $\|T\|\to 0$ 时，$\underbrace{\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\cdot\varphi'(\tau_i)\Delta t_i}_{(*)}\to I$ (1)

令 $\xi_i=\varphi(\tau_i)$，$i=1,2,\cdots,n$

则 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\cdot(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))$

L-中值定理. $\forall i,\exists\tilde{\tau}_i\in[t_{i-1},t_i]$ $\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\cdot\varphi'(\tilde{\tau}_i)\cdot\Delta t_i$

$=(*)+\underbrace{\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\cdot(\varphi'(\tilde{\tau}_i)-\varphi'(\tau_i))\Delta t_i}_{(\Delta)}$ (2)

注意到 $|(\Delta)|\le\sum_{i=1}^n|f(\varphi(\tau_i))|\cdot W_i^{\varphi'}\cdot\Delta t_i$

由 f 在 $[a,b]$ 可积，从而 f 有界. 故 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$，$x\in[a,b]$

故 $|(\Delta)|\le M\sum_{i=1}^n W_i^{\varphi'}\Delta t_i$

由 φ' 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，可得到 $\|T\|\to 0$，有 $\sum_{i=1}^n W_i^{\varphi'}\Delta t_i\to 0$

现在，在 (1) 式两边令 $\|T\|\to 0$

则 $(\Delta)\to 0$，并且有 $\|T'\|\to 0$，从而

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\to I$

于是 (1) 式成立

积分第二中值定理

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使

$\int_a^b f(x)g(x)=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\,dx$

特殊情形：f 在 $[a,b]$ 上连续

g 在 $[a,b]$ 上单调且 g' 在 $[a,b]$ 上可积

证：令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

则 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$ 且 $F(a)=0$

从而 由分部积分公式

$\int_a^b f(x)g(x)=\int_a^b g(x)\,dF(x)$

$=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$

$=g(b)F(b)-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$

注意：$g(b)F(b)=g(b)\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

由于 g 在 $[a,b]$ 上单调，所以 g' 在 $[a,b]$ 上不变号

于是由积分第一中值定理，可得 $\exists\xi\in[a,b]$ 使

$\int_a^b F(x)g'(x)\,dx=F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx=(g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)\,dx$

所以有 $g(b)F(b)-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$

$=g(b)\int_a^b f(x)\,dx-(g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)\,dx$

$=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$

令 $H(x)=g(a)\int_a^x f(t)\,dt+g(b)\int_x^b f(t)\,dt$

$H(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导

$H(a)=g(b)\int_a^b f(t)\,dt$

$H(b)=g(a)\int_a^b f(t)\,dt$

在两者之间

而 $\int_a^b f(x)g(x)=g(\xi)\int_a^b f(x)g(x)$

$\Rightarrow\int_0^\eta f(x)\,dx=0$ $\int_\eta^\pi f(x)\,dx=0$

由积分第一中值定理 即可得 $\exists\xi_1$ 与 ξ_2 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

比较两种换元积分法

① 设 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导函数，令 m 和 M 分别是 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值与最大值，即 $[m,M]=\varphi([\alpha,\beta])$ φ 在 $[\alpha,\beta]$ 的值域

若函数 f 在 $[m,M]$ 上连续，则 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx$

② 设 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数，并且 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调

记 $[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$

则 对于 $[a,b]$ 上可积的函数 f，有

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx$

① 由于 f 在 $[m,M]$ 连续，存在原函数，可以直接运用 N-L 公式

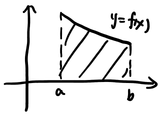
② 注意 f 仅为可积，证明回归定积分定义

7.4 定积分在几何计算中的应用

2023年12月26日 星期二 12:04

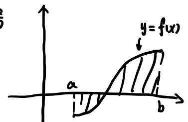
一、求平面图形的面积

(1) 若 f 是 $[a,b]$ 上的连续，非负函数，则由曲线 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 以及 X 轴直线 $x=a$，$x=b$ 所围的曲边梯形 E 的面积为 $S_E=\int_a^b f(x)\,dx$



(2) 如图，f 在 $[a,b]$ 上连续，可能变号，则阴影部分的面积为

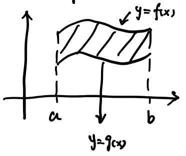
$$S_E=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



(3) 如图，f 与 g 都在 $[a,b]$ 上连续且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\geq g(x)$ (5)

则阴影部分的面积为

$$S_E=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



(4) 如图，设 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上连续，但 (5) 不一定成立，则阴影部分 E 的面积为

$$S_E=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

设曲线 C 由参数方程

$$x=x(t)\quad y=y(t)\ ,\ t\in[\alpha,\beta]\qquad (1)$$

给出，在 $[\alpha,\beta]$ 上 $y(t)$ 连续，$x(t)$ 有连续的导数且 $x'(t)\neq 0$ ($x(t)$ 是单调的)

记 $a=x(\alpha)$ $b=x(\beta)$

则由直线 $x=a$，$x=b$，曲线 C 和 x 轴所围图形的面积

$$S=\int_\alpha^\beta |y(t)\,x'(t)|\,dt$$

如果由参数方程 (1) 所表示的曲线 C 是封闭的，即

$x(\alpha)=x(\beta)$，$y(\alpha)=y(\beta)$

如果存在 $\gamma\in(\alpha,\beta)$ 使

(i) C 在 $t\in[\alpha,\gamma]$ 的部分 C_1 满足：

$y(t)$ 连续，$x(t)$ 连续可微，且 $x'(t)>0$，$\forall t\in(\alpha,\gamma)$

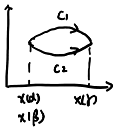
(ii) C 在 $t\in[\gamma,\beta]$ 的部分 C_2 满足：

$y(t)$ 连续，$x(t)$ 连续可微，且 $x'(t)<0$，$\forall t\in(\alpha,\gamma)$

(iii) 曲线 C_1 在曲线 C_2 的上方，如果

$t_1\in(\alpha,\gamma)$，$t_2\in(\gamma,\beta)$ 满足 $x(t_1)=x(t_2)$

则必有 $y(t_1)\geq y(t_2)$ [当然 C_2 也可在 C_1 上方]



则曲线 C 所围面积为：

$$S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt\right|$$

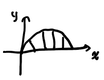
如果曲线 C 由极坐标方程 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$ 给出

则由曲线 C，射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围平面图形的面积

$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta$$

例：求由摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ 的一拱 ($t\in[0,2\pi]$) 与 x 轴所围平面图形的面积

$$S=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt$$



$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$

例：求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围面积

由以下参数方程表出 $x=a\sin t$ $y=b\cos t$ $t\in[0,2\pi]$

$$S=\int_0^{2\pi}ab\cos^2 t\,dt$$

$$=ab\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t+1}{2}$$

$$=ab\left(\frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$=ab\pi$$

例：求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围平面图形的面积

由方程可得 $\cos 2\theta\geq 0$，从而 $2\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{2}\pi]$

即 $\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi]$

从而由对称性

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=2a^2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

二、曲线的弧长 (带导数的)

设曲线 C 由参数方程

$$x=x(t)\quad y=y(t)\ ,\ t\in[\alpha,\beta]$$

给出，其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续

任给 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 $T=\{\overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{t_0}},t_1,\cdots \overset{\beta}{\overset{\shortparallel}{t_n}}\}$

定义 $l_T=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$

如果 $\lim_{\|T\|\to 0} l_T$ 存在且有限，则称曲线是可求长的

并且称该极限为曲线 C 的弧长，记作 $l=\lim_{\|T\|\to 0} l_T$

定理：如果 (1) 中的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，且曲线 C 是可求长的，并且弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\quad (*)$$

证：任给 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 $T=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$

有 $l_T=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i)\cdot\Delta t_i)^2+(y'(\tau_i)\cdot\Delta t_i)^2}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\tau_i))^2}\cdot\Delta t_i$$

其中 $\xi_i,\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ $i=1,\cdots,n$

注意到由 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，所以

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i=(*)$$

因此，为证定理成立，只需证

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\tau_i))^2}-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\right]\Delta t_i=0$$

由三角不等式

$$\leq |y'(\tau_i)-y'(\xi_i)|$$

从而 原式 $\leq \lim_{\|T\|\to 0}|y'(\tau_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i\leq\lim_{\|T\|\to 0}w_i^{y'}\Delta t_i=0$

推论：如果曲线 C 是方程

$$y=f(x)\ ,\quad x\in[a,b]$$

给出，并且 f 在 $[a,b]$ 上连续可微，则曲线 C 的弧长 $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ 看作 $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$

$$=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

推论 如果曲线 C 是由极坐标方程

$$r=r(\theta)\qquad \theta\in[\alpha,\beta]$$

给出的，并且 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，则曲线 C 可求长，且弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}$$

例：求悬链线 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 那一段的弧长

$1+(y'(x))^2=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

$$l=\frac{1}{2}\int_0^a(e^x+e^{-x})\,dx$$

例：求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的周长

$(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2$

$=a^2(1+\cos\theta)^2+(a(-\sin\theta))^2$

$=2a^2+2\cos\theta a^2=4a^2|\cos\frac{\theta}{2}|^2$

从而所求周长为 $L=2a\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|\,d\theta=8a$

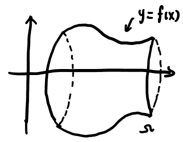
对于空间曲线 C：

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases},\ t\in[\alpha,\beta]$$

若 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，则曲线 C 可求长并且弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

三、旋转体的体积



求 $V(\Omega)=?$

条件：$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

Ω 是由平面图形

$0\leq y\leq|f(x)|$，$x\in[a,b]$

绕 x 轴旋转一周得到的柱体

则 $V(\Omega)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

设平面曲线 C 由参数方程

$$x=x(t)\quad y=y(t)$$

给出，$x'(t)$ 与 $y(t)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且

$x'(t)\neq 0$，$\forall t\in(\alpha,\beta)$

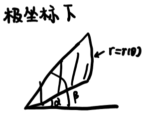
令 Ω 是由平面图形

$\{(x(t),y),\ 0\leq y\leq|y(t)|,\ t\in[\alpha,\beta]\}$

绕 x 轴旋转一周得到的柱体

$$V(\Omega)=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\,|x'(t)|\,dt$$

极坐标下



由 $0\leq r\leq r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]$ 所表示的区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

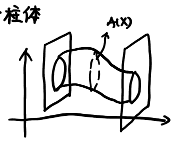
Ω 是介于平面 $x=a$ 与平面 $x=b$ 之间的一个柱体

若 $\forall a\leq x\leq b$

如图所示的截面面积为 $A(x)$

设 $A(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则

Ω 的体积为 $V(\Omega)=\int_a^b A(x)\,dx$



用"微元法"求体积 (面积，弧长)

$\boxed{\Delta V\approx A(x)\,\Delta x}\Rightarrow dv=A(x)\,dx$

$\Rightarrow V=\int_a^b A(x)\,dx$

'微元法'的关键步骤

第一步：将小区间取为 $[x,x+\Delta x]$

第二步：根据实际问题，得出

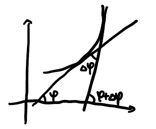
$\Delta V\approx A(x)\cdot\Delta x\Rightarrow dv=A(x)dx$

(核心：去掉高阶无穷小量)

第三步：进行累加

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

曲率 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t\in[\alpha,\beta]$



Δs：弧长的改变量

$\Delta\varphi$：两切线的夹角

$$k(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\varphi'(t)}{s'(t)}\right|$$

$$k(t)=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$$